

# Éléments sur la photoélasticité

Emmanuel Plaut, ENSEM & ENSMN, 1998-2003 & 2009

Cette note est une nouvelle version d'une note que j'avais mise au point lorsque j'étais maître de conférences à l'ENSEM, et que j'encadrais des TP de photoélasticimétrie. Du fait de l'achat du matériel de démonstration Stress-Opticon de Vishay à l'école des Mines de Nancy, cette note pourrait maintenant intéresser quelques enseignants ou élèves de cette école.

## 1 Généralités

La **photoélasticité** est la science qui étudie en physique les effets sur la lumière des contraintes et déformations appliquées à des corps solides élastiques. La **technique expérimentale** qui sert à mesurer les contraintes par photoélasticité est la **photoélasticimétrie**.

Il existe deux procédés de photoélasticimétrie :

- la **photoélasticimétrie par transmission**, où l'on réalise une reproduction de la forme à étudier, qui doit être plane, dans un matériau photoélastique. Ce modèle est observé par transparence, c'est à dire placé entre des filtres polarisants pendant qu'on lui applique des efforts.
- la **photoélasticimétrie par réflexion**, où l'on commence par rendre réfléchissante la surface du solide à étudier (non transparent en général !), à l'aide d'une peinture ou d'une colle chargée de poudre métallique. On recouvre alors cette surface d'une mince couche de produit photoélastique. La lumière traverse le revêtement photoélastique, est réfléchi et traverse une seconde fois le revêtement. Les filtres polarisants sont placés côte à côte.

Les principes de la théorie étant identiques dans les deux cas, nous présentons ici uniquement la **photoélasticimétrie par transmission** utilisée lors des TP ENSEM ou avec le Stress-Opticon.

## 2 Rappels d'optique - Introduction au phénomène de biréfringence

La lumière se propage par superposition d'ondes sinusoïdales possédant un champ électrique de la forme<sup>1</sup> :

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \cos(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} + \phi_0) \quad (1)$$

où  $t$  est le **temps**,  $\omega$  la **pulsation**,  $\mathbf{r}$  le **vecteur position**,  $\mathbf{k}$  le **vecteur d'onde**. Sa norme est :

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} , \quad (2)$$

$\lambda$  étant la **longueur d'onde** du rayonnement considéré. Cette longueur d'onde est caractéristique de la couleur de l'onde **monochromatique** (1), qui peut être obtenue directement à l'aide d'une source de lumière monochromatique où indirectement par filtrage de la lumière naturelle à travers un filtre monochromatique. Dans l'ordre décroissant des longueurs d'ondes de 0.7 à 0.4  $\mu\text{m}$ , les ondes (1) sont rouge, orangé, jaune, verte, bleu, indigo puis violette, la lumière blanche naturelle comprenant elle toutes les longueurs d'ondes précédentes. L'onde (1) est dite aussi **polarisée rectilignement**,  $\mathbf{E}_0$  ( $\mathbf{E}_0 \perp \mathbf{k}$ ) étant sa **direction de polarisation**. La lumière naturelle n'est pas polarisée en général ; on peut la polariser à l'aide d'un filtre polarisant ou polariseur qui ne laisse passer que les champs électriques parallèles à son axe de polarisation. Deux filtres polarisants successifs d'axes parallèles laissent passer de la lumière ; deux filtres polarisants croisés c'est à dire à axes perpendiculaires ne laissent passer aucune lumière. Un montage optique comporte en général deux filtres polarisants, l'un en entrée du trajet de la lumière appelé **polariseur** et noté **P**, l'autre à la sortie du trajet de la lumière (i.e. juste avant l'observateur) appelé **analyseur** et noté **A**.

---

<sup>1</sup> Dans tout ce qui suit, les vecteurs sont notés en caractères gras.

Dans le vide ou dans l'air, les équations de Maxwell mènent à l'équation de propagation :

$$\Delta \mathbf{E} = \epsilon_0 \mu_0 \partial_t^2 \mathbf{E}$$

d'où la relation de dispersion :

$$k = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} \omega = \frac{\omega}{c} . \quad (3)$$

Dans un milieu matériel isotrope quelconque, la principale modification des propriétés optiques est en général liée à des propriétés diélectriques. Ces propriétés font que l'excitation électrique  $\mathbf{D}$  n'est plus seulement  $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$  mais s'écrit plutôt :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \epsilon_r \mathbf{E} ,$$

où  $\epsilon_r$  est la constante diélectrique relative du milieu. On obtient alors<sup>2</sup> la relation de dispersion plus générale :

$$k = \sqrt{\epsilon_r} \frac{\omega}{c} = n k_0 \quad (4)$$

où  $k_0 = \omega/c$  est le vecteur d'onde de l'onde lumineuse de même pulsation se propageant dans le vide. Dans l'équation (4),

$$n = \sqrt{\epsilon_r}$$

est l'*indice de réfraction* du milieu. La longueur d'onde s'écrit :

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{\lambda_0}{n} \quad (5)$$

où  $\lambda_0 = 2\pi/k_0$  est la longueur d'onde de l'onde lumineuse de même pulsation se propageant dans le vide.

Encore plus intéressantes sont les propriétés optiques d'un milieu anisotrope, dans lequel l'excitation électrique s'écrit :

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \bar{\bar{\epsilon}}_r \cdot \mathbf{E}$$

où  $\bar{\bar{\epsilon}}_r$  est le tenseur diélectrique relatif du milieu. Ce tenseur devant être symétrique se diagonalise sur une base orthonormale ; les directions correspondantes sont les *axes optiques* du milieu. Dans tout ce qui suit, on suppose que les ondes arrivent toujours sous la même incidence normale, i.e.  $\mathbf{k} \parallel \mathbf{z}$  fixé, et que le milieu est homogène dans la direction  $\mathbf{z}$ . Ce sont alors les propriétés du milieu dans le plan perpendiculaire à  $\mathbf{z}$  qui importent (cas "bidimensionnel"). Pour des raisons de symétrie,  $\bar{\bar{\epsilon}}_r$  restreint à ce plan peut s'y diagonaliser. Notant  $\mathbf{x}'$  et  $\mathbf{y}'$  les axes optiques correspondants, on écrit donc que :

$$\text{Restr}(\bar{\bar{\epsilon}}_r)_{\text{plan}(x,y)} = \epsilon_{re} \mathbf{x}' \otimes \mathbf{x}' + \epsilon_{ro} \mathbf{y}' \otimes \mathbf{y}' .$$

En conséquence on obtient à nouveau<sup>3</sup> une relation de dispersion de la forme (4), mais où la constante diélectrique à utiliser est  $\epsilon_{re}$  si  $\mathbf{E}$  est parallèle à  $\mathbf{x}'$ ,  $\epsilon_{ro}$  si  $\mathbf{E}$  est parallèle à  $\mathbf{y}'$ . On observe le phénomène de *biréfringence* : l'indice d'une onde lumineuse dépend de l'orientation de la direction de polarisation de l'onde relativement aux axes optiques du milieu. On choisit en général d'appeler *extraordinaire* l'onde, polarisée suivant  $\mathbf{x}'$ , qui se propage avec l'indice le plus fort :

$$n_e = \sqrt{\epsilon_{re}} ,$$

et d'appeler *ordinaire* l'onde, polarisée suivant  $\mathbf{y}'$ , qui se propage avec l'indice le plus faible :

$$n_o = \sqrt{\epsilon_{ro}} .$$

Le *degré de biréfringence* (ou encore, abusivement, la biréfringence tout court) du milieu est alors défini comme la différence :

$$\Delta n = n_e - n_o \quad (6)$$

<sup>2</sup> Les équations de Maxwell conduisant maintenant à l'équation de propagation  $\Delta \mathbf{E} = \epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \partial_t^2 \mathbf{E}$ .

<sup>3</sup> Les équations de Maxwell conduisent à deux équations de propagation différentes selon la direction de  $\mathbf{E}$  dans le plan  $(x,y)$ , à savoir  $\Delta E_{x'} = \epsilon_0 \epsilon_{re} \mu_0 \partial_t^2 E_{x'}$  et  $\Delta E_{y'} = \epsilon_0 \epsilon_{ro} \mu_0 \partial_t^2 E_{y'}$ .

que l'on peut considérer comme nulle dans un milieu non biréfringent. Si on envoie sur ce milieu une onde :

$$\mathbf{E} = a \cos(\omega t) \mathbf{x}' + b \cos(\omega t) \mathbf{y}'$$

on obtiendra après traversée d'une épaisseur  $e$  :

$$\mathbf{E} = a \cos(\omega t - k_e e) \mathbf{x}' + b \cos(\omega t - k_o e) \mathbf{y}' .$$

Il est apparu un déphasage :

$$\phi = (k_e - k_o)e = \Delta n k_0 e = 2\pi \Delta n \frac{e}{\lambda_0} \quad (7)$$

qui peut être à la source d'intéressants phénomènes d'interférences.

Par exemple, une ***lame quart d'onde*** est une lame constituée d'un tel milieu de degré de biréfringence connu, et d'épaisseur  $e$  contrôlée de façon à ce que le déphasage précédent vaille exactement  $\frac{\pi}{2}$ . Pour le même champ d'entrée,  $\mathbf{E} = a \cos(\omega t) \mathbf{x}' + b \cos(\omega t) \mathbf{y}'$ , on observera alors en sortie<sup>4</sup> :

$$\mathbf{E} = a \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \mathbf{x}' + b \cos(\omega t) \mathbf{y}' = a \sin(\omega t) \mathbf{x}' + b \cos(\omega t) \mathbf{y}' .$$

Si on place une telle lame à la sortie d'un filtre polarisant d'axe  $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ , on passera seulement de  $\mathbf{E} = a \cos(\omega t) \mathbf{x}$  à  $\mathbf{E} = a \cos(\omega t - \frac{\pi}{2}) \mathbf{x}$ , ce qui est sans effet pour l'optique. Par contre si la lame se trouve orientée à  $\frac{\pi}{4}$  par rapport au filtre polarisant, i.e.  $\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{x}' - \mathbf{y}')$ , on passera de  $\mathbf{E} = a \cos(\omega t) \mathbf{x}$  à :

$$\mathbf{E} = \frac{a}{\sqrt{2}} [\sin(\omega t) \mathbf{x}' - \cos(\omega t) \mathbf{y}'] \quad (8)$$

qui correspond à une onde ***polarisée circulairement***.

Rappelons qu'à cause de la difficulté de la mesure des facteurs de transmission et de sensibilité, la définition d'une ***intensité lumineuse*** absolue est très délicate. On se contente en général de définir des intensités lumineuses relatives, comme étant proportionnelles à l'énergie lumineuse moyenne donc à la valeur moyenne de  $\mathbf{E}^2$  :

$$I(\mathbf{r}) = 2 \langle \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)^2 \rangle_t . \quad (9)$$

### 3 Biréfringence accidentelle

Un matériau ***photoélastique*** présente le phénomène de ***biréfringence accidentelle*** : isotrope et non biréfringent s'il n'est pas sollicité mécaniquement, il devient au contraire anisotrope et biréfringent lorsqu'il est soumis à des contraintes. Dans le plan où s'appliquent ces contraintes (on se place toujours dans le cas "bidimensionnel"  $(x, y)$  avec des ondes d'incidence normale par rapport au plan  $(x, y)$ ), les ***axes optiques*** de biréfringence sont alors les ***directions principales X et Y des contraintes***. De plus le degré de biréfringence, qui doit s'annuler si la sollicitation mécanique est isotrope, peut être en bonne approximation décrit par une loi linéaire en l'anisotropie des contraintes principales  $\sigma_1 \geq \sigma_2$ , soit  $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2 \geq 0$ . On introduit donc la ***constante de Brewster C*** du matériau, quotient du degré de biréfringence par l'anisotropie de contrainte :

$$\Delta n = C \Delta\sigma = C(\sigma_1 - \sigma_2) . \quad (10)$$

$C$  a la dimension de l'inverse d'une contrainte donc de l'inverse d'une pression. Notons que  $\Delta\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$  est liée à la valeur maximale du cisaillement dans le plan  $(x, y)$  au point considéré, soit  $\Delta\sigma/2 = (\sigma_1 - \sigma_2)/2$ . Par application de (7), si en entrée on a :

$$\mathbf{E} = a \cos(\omega t) \mathbf{X} + b \cos(\omega t) \mathbf{Y} , \quad (11)$$

<sup>4</sup> Comme seule la phase *relative* des deux ondes se propageant suivant  $\mathbf{x}'$  et  $\mathbf{y}'$  importe, on redéfinit souvent la phase absolue des ondes de façon à ce que le déphasage n'apparaisse que sur l'une des deux ondes seulement.

on récupère en sortie :

$$\mathbf{E} = a \cos(\omega t - \phi) \mathbf{X} + b \cos(\omega t) \mathbf{Y} \quad (12)$$

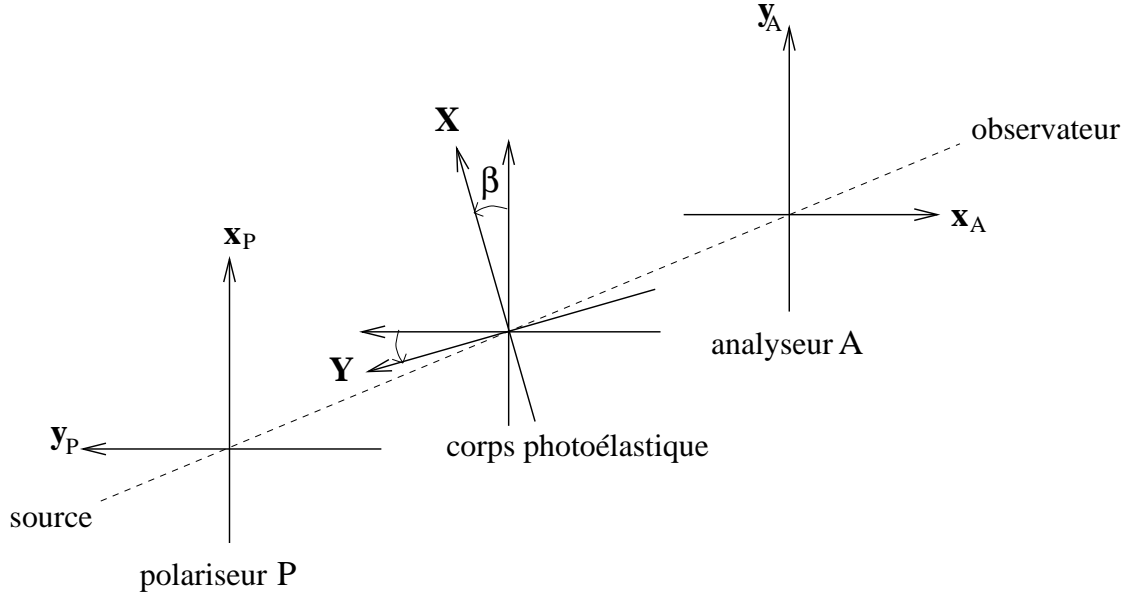
où le déphasage  $\phi$  est donné par la *loi de Maxwell* :

$$\phi = 2\pi C \Delta \sigma \frac{e}{\lambda_0} \quad (13)$$

$e$  étant l'épaisseur du matériau traversé. On notera bien que  $\mathbf{X}$  est associé à  $n_e$  et  $\sigma_1$  tandis que  $\mathbf{Y}$  est associé à  $n_o$  et  $\sigma_2$ .

### 3.1 Étude en lumière polarisée rectilignement, P et A croisés

Introduisons  $\beta$  l'angle entre la direction  $\mathbf{x}_P$  du polariseur  $\mathbf{P}$  et la direction principale  $\mathbf{X}$  au point considéré :



▷ Juste à la sortie du polariseur nous pouvons écrire :

$$\mathbf{E} = a \cos(\omega t) \mathbf{x}_P = a \cos(\omega t) [\cos \beta \mathbf{X} - \sin \beta \mathbf{Y}] .$$

Après la traversée du matériau photoélastique, conformément à (12) on aura :

$$\mathbf{E} = a \cos \beta \cos(\omega t - \phi) \mathbf{X} - a \sin \beta \cos(\omega t) \mathbf{Y} .$$

L'analyseur sélectionne alors les vibrations parallèles à  $\mathbf{x}_A$ , d'où en sortie :

$$\begin{aligned} E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}_A &= -a \cos \beta \cos(\omega t - \phi) \sin \beta + a \sin \beta \cos(\omega t) \cos \beta \\ &= \frac{a}{2} \sin 2\beta [\cos(\omega t) - \cos(\omega t - \phi)] \\ E &= -a \sin 2\beta \sin \left( \omega t - \frac{\phi}{2} \right) \sin \frac{\phi}{2} . \end{aligned}$$

En prenant la carré moyen de  $E$  on obtient l'intensité lumineuse transmise à un facteur près (cf équation (9)), soit :

$$I = a^2 \sin^2 2\beta \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (14)$$

On constate la possibilité d'annulation de l'intensité ou d'extinction due à des *interférences destructrices* entre les ondes de polarisation  $\mathbf{X}$  et  $\mathbf{Y}$ . Ces extinctions peuvent se produire dans deux cas, si :

$$\beta = 0 \text{ ou } \frac{\pi}{2} \quad (15)$$

Cette condition définit les **franges isoclines**<sup>5</sup>, lieu des points du modèle photoélastique où les axes de biréfringence sont parallèles aux directions de polarisation et d'analyse. Notons qu'à ce niveau on ne peut pas faire la distinction entre  $\beta = 0$  et  $\beta = \frac{\pi}{2}$ , i.e.  $\mathbf{X} = \mathbf{x}_P$  ou  $\mathbf{y}_P$ .

ou si :

$$\phi = 2n\pi \quad \text{i.e.} \quad \Delta\sigma = n \frac{\lambda_0}{e} \frac{1}{C} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \quad (16)$$

Cette condition définit les **franges isochromatiques**<sup>6</sup>, lieu des points du modèle photoélastique d'égal cisaillement maximum, soit en introduisant :

$$\sigma_0 = \frac{\lambda_0}{e} \frac{1}{C} \quad (17)$$

$$\Delta\sigma = n\sigma_0 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \quad (18)$$

La position de ces isochromatiques dépend directement de la longueur d'onde  $\lambda_0$  de la lumière utilisée, i.e. de la *couleur* de cette lumière ; ceci explique leur nom.

L'observation nette d'isochromatiques n'est assurée que pour une lumière monochromatique. Pour une lumière blanche, on aura superposition des intensités dues à chaque longueur d'onde présente (car les champs associés se superposent de manière *incohérente* et ne peuvent donc interférer), d'où des extinction moins franches correspondant cependant à la longueur d'onde moyenne du spectre de la lumière blanche utilisée. Cependant, un intérêt de la lumière blanche est que les franges qui apparaissent sont colorées, ce qui peut permettre à un oeil entraîné de distinguer immédiatement leur ordre. En particulier, la frange d'ordre 0 est bien distincte car la seule à être vraiment noire.

Pratiquement il est important de remarquer que les *isoclines tournent avec l'orientation du couple  $\mathbf{P-A}$*  qui définit l'angle  $\beta$ , alors que les *isochromatiques restent fixes indépendamment de l'orientation du couple  $\mathbf{P-A}$* . Ceci permet de distinguer ces deux types d'extinction en faisant tourner solidairement le couple  $\mathbf{P-A}$ .

D'autre part, en élasticité linéaire, lorsqu'un chargement est progressivement augmenté les directions propres du tenseur des contraintes restent constantes, donc la position des *isoclines* est *indépendante de la valeur du chargement*. Au contraire, la position des *isochromatiques* est *dépendante de la valeur du chargement*, ce que l'on observe clairement en remarquant que l'augmentation progressive du chargement entraîne l'apparition d'isochromatiques toujours plus nombreuses<sup>7</sup>. Il est donc aussi possible de faire la différence entre les deux types d'extinction en augmentant progressivement le chargement appliqué au modèle photoélastique.

Avec ce montage optique, on peut facilement déterminer l'orientation des directions principales des contraintes à  $\frac{\pi}{2}$  près. Pour cela, étant donné un point du modèle photoélastique à étudier, on se place d'abord à faible chargement pour ne pas avoir trop d'isochromatiques. On fait ensuite tourner solidairement le couple  $\mathbf{P-A}$  de façon à amener une isocline sur le point considéré ; on sait alors que :

$$\beta = (\widehat{\mathbf{x}_P, \mathbf{X}})$$

vaut 0 ou  $\frac{\pi}{2}$ . La mesure de l'anisotropie des contraintes au point considéré est ensuite basée sur l'étude des isochromatiques. Pour cela, on a intérêt à passer en lumière polarisée circulairement.

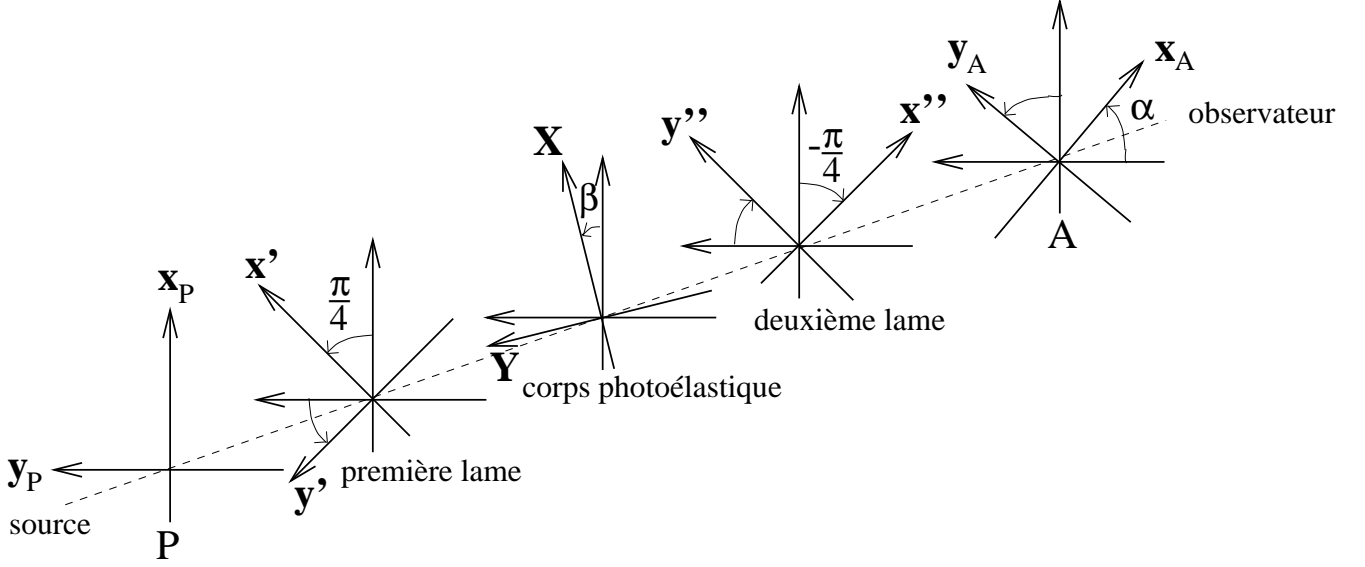
<sup>5</sup> du grec *isoklinês*, de *klinein* "pencher".

<sup>6</sup> d'ordre entier, cf plus loin.

<sup>7</sup> Plus précisément la formule (14) montre compte tenu de la loi de Maxwell (10) que l'intensité lumineuse en un point du modèle photoélastique est une fonction sinusoïdale du cisaillement en ce point.

### 3.2 Étude en lumière polarisée circulairement

Afin de polariser circulairement la lumière, on insère des lames quart d'onde à  $\frac{\pi}{4}$  derrière le polariseur et devant l'analyseur (ou on bascule les lames qui étaient déjà présentes mais inactives d'un angle de 0 à  $\frac{\pi}{4}$ , cf. la remarque de la fin de la section 2) :



▷ Juste à la sortie du polariseur nous pouvons écrire :

$$\mathbf{E} = a\sqrt{2} \cos(\omega t) \mathbf{x}_P = a \cos(\omega t) (\mathbf{x}' - \mathbf{y}') .$$

A la sortie de la première lame quart d'onde nous avons donc :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= a \sin(\omega t) \mathbf{x}' - a \cos(\omega t) \mathbf{y}' \\ &= a \sin(\omega t) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \mathbf{X} + \sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \mathbf{Y} \right] - a \cos(\omega t) \left[ -\sin\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \mathbf{X} + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \beta\right) \mathbf{Y} \right] \\ \mathbf{E} &= a \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \beta\right) \mathbf{X} - a \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{4} - \beta\right) \mathbf{Y} . \end{aligned}$$

Notant provisoirement  $\phi_0 = \omega t + \frac{\pi}{4} - \beta$ , on aura après la traversée du matériau photoélastique selon (12) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= a \sin(\phi_0 - \phi) \mathbf{X} - a \cos(\phi_0) \mathbf{Y} \\ &= a \sin(\phi_0 - \phi) \left[ \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \mathbf{x}'' + \sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \mathbf{y}'' \right] - a \cos(\phi_0) \left[ -\sin\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \mathbf{x}'' + \cos\left(\frac{\pi}{4} + \beta\right) \mathbf{y}'' \right] \\ \mathbf{E} &= a \left[ \cos\frac{\phi}{2} \cos\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) - \sin\frac{\phi}{2} \cos\left(\omega t - 2\beta - \frac{\phi}{2}\right) \right] \mathbf{x}'' + a \left[ \cos\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) + \sin\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - 2\beta - \frac{\phi}{2}\right) \right] \mathbf{y}'' . \end{aligned}$$

A la sortie de la deuxième lame quart d'onde il vient :

$$\mathbf{E} = a \left[ \cos\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) - \sin\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - 2\beta - \frac{\phi}{2}\right) \right] \mathbf{x}'' + a \left[ \cos\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - \frac{\phi}{2}\right) + \sin\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - 2\beta - \frac{\phi}{2}\right) \right] \mathbf{y}'' . \quad (19)$$

Si l'analyseur est **croisé** avec le polariseur, i.e.  $\alpha = 0$  sur la figure, il sélectionne les vibrations parallèles à  $\mathbf{x}_A = -\mathbf{y}_P$  selon :

$$E = a \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}_A = -a\sqrt{2} \sin\frac{\phi}{2} \sin\left(\omega t - 2\beta - \frac{\phi}{2}\right) .$$

L'intensité lumineuse transmise si **P** et **A** sont **croisés** est donc :

$$I = 4a^2 \sin^2 \frac{\phi}{2} \quad (20)$$

qui montre que l'on observe uniquement les **franges isochromatiques d'ordre entier** :

$$\phi = 2n\pi \quad \text{i.e.} \quad \Delta\sigma = n\sigma_0 \quad \text{pour } n \in \mathbb{N} \quad (21)$$

L'intérêt de cette manipulation est d'avoir totalement éliminé les isoclines qui ne se superposent plus aux isochromatiques comme en lumière polarisée rectilignement (comparer (14) et (20)). C'est cette configuration optique qui est utilisée dans le Stress-Opticon.

On peut aussi accéder à des isoclines d'ordre demi entier en orientant l'analyseur **parallèlement** au polariseur.

▷ En se basant toujours sur la figure de la page précédente, on a maintenant  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  i.e.  $\mathbf{x}_A = \mathbf{x}_P$ , d'où

$$E = \mathbf{E} \cdot \mathbf{x}_A = \sqrt{2} \cos \frac{\phi}{2} \sin \left( \omega t - \frac{\phi}{2} \right) .$$

L'intensité lumineuse transmise si  $\mathbf{P}$  et  $\mathbf{A}$  sont **parallèles** est donc :

$$\boxed{I = 4a^2 \cos^2 \frac{\phi}{2}} \quad (22)$$

qui montre que l'on observe uniquement les **franges isochromatiques d'ordre demi entier** :

$$\boxed{\phi = (2n + 1)\pi \text{ i.e. } \Delta\sigma = \left(n + \frac{1}{2}\right)\sigma_0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}} \quad (23)$$

Ce montage optique est donc en général utilisé pour déterminer la différence  $\Delta\sigma$  entre les contraintes principales en un point donné du modèle photoélastique. En pratique on peut progressivement augmenter le chargement et observer le défilement des franges au point considéré. On parvient alors facilement à identifier l'ordre des franges qui encadrent le point pour un chargement donné. On en déduit alors que l'**ordre réel** :

$$n = \frac{\phi}{2\pi} = \frac{\Delta\sigma}{\sigma_0} \quad (24)$$

au point considéré est encadré par les ordres  $n_1$  et  $n_2$  des franges voisines :

$$n_1 \leq n \leq n_2 = n_1 + 1 . \quad (25)$$

En utilisant les franges d'ordre demi entier, on peut aussi encadrer  $n$  entre deux valeurs distantes de  $\frac{1}{2}$  seulement. On pourrait ensuite utiliser des **compensateurs**, lames de biréfringence connue, pour essayer d'amener une extinction au point considéré<sup>8</sup>.

Afin de déterminer la valeur exacte de  $n$ , il existe une méthode dite d'**interpolation angulaire de Tardy** qui ne nécessite pas l'usage de compensateurs. Dans cette méthode, on commence par utiliser la lumière polarisée rectilignement pour faire passer une isocline au point considéré par rotation solidaire du couple  $\mathbf{P}$ - $\mathbf{A}$  croisés. D'après la discussion de la section 3.1, on sait alors que l'angle  $\beta$  entre  $\mathbf{x}_P$  et  $\mathbf{X}$  vaut 0 ou  $\frac{\pi}{2}$ . On bloque cette orientation du polariseur et on active les lames quart d'onde pour passer en lumière polarisée circulairement. L'idée est alors de faire tourner l'analyseur, à partir de la position croisée,  $\alpha = 0$  sur la figure, d'un angle  $\alpha > 0$  (donc pour l'observateur situé "derrière" l'analyseur en faisant tourner l'analyseur dans le sens des aiguilles d'une montre) de façon à amener soit la frange inférieure  $n_1$  soit la frange supérieure  $n_2$  au point étudié. Selon ces deux possibilités, on pourra discriminer entre  $\beta = 0$  et  $\beta = \frac{\pi}{2}$  ; d'autre part de la valeur de  $\alpha$  on pourra déduire  $n$ .

## 4 Bibliographie

Un exposé clair et complet sur la photoélasticité (principes et applications) est donné dans la partie sur les méthodes expérimentales de Bellet D. & Barrau J. J. (1990) *Cours d'élasticité* CEPADUES-ÉDITIONS.

<sup>8</sup> Ceci revient à opérer avec les déphasages comme on le fait pour peser un objet sur une balance. L'objet fait dévier la balance, on place sur l'autre plateau des masses connues et lorsqu'on retrouve l'équilibre, on sait que le poids de l'objet est égal à celui des masses connues.